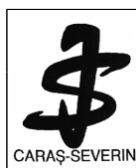




MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 18.02.2023,

Clasa a IX-a

○ Timp de lucru: 180 de minute.

○ Fiecare problemă se punctează cu 0 – 7 puncte.

Problema 1. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , numărul $x_n = (5^n - 1) \cdot (4^n + 15n - 1)$ se divide cu 36.

Problema 2. Pentru orice număr real x se notează $E(x) = \frac{2x+1}{3}$, $F(x) = \frac{4x+5}{3}$ și $[x]$ partea întreagă a numărului x .

(a) Determinați mulțimea $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 \cdot E(x)| + |6 \cdot F(-x)| = 5\}$.

(b) Arătați că, pentru orice număr întreg m , există cel mult un număr natural k astfel încât $[E(k)] + [F(k)] = m$.

Problema 3. Fie a, b, c strict pozitive cu $a + b + c = 1$.

a) Arătați că $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} \geq 2$

b) Arătați că $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Problema 4. Se consideră un punct P în interiorul unui triunghi ABC și punctele D, E, F pentru care există numerele $t, u, v \in (0, \infty)$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = t \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CE} = u \cdot \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AF} = v \cdot \overrightarrow{FB}$.

Demonstrați că:

(a) Dacă $t = u = v$, atunci triunghiurile DEF și ABC au același centru de greutate.

(b) Dacă PD, PE, PF sunt respectiv bisectoarele unghiurilor $\angle BPC, \angle CPA, \angle APB$, atunci dreptele AD, BE și CF sunt concurente.